

Практическое занятие

Тема: Расчет временных параметров сетевого графика

Расчет критического пути

Почти в любой сети от исходного события до завершающего ведет несколько путей. Каждому пути соответствует последовательность каких-то работ. Путь в сети от исходного события до завершающего называется **полным путем**. Обозначается полный путь буквой *L*. **Продолжительностью пути** в сетевом графике называется время, необходимое для выполнения всех работ, лежащих на этом пути. Продолжительность полного пути обозначим $t(L)$.

Путь, имеющий наибольшую протяженность, называется **критическим путем** $L_{кр}$. Протяженность критического пути обозначаем $t(L_{кр})$ или $t_{кр}$.

Замечание. В сети может быть несколько критических путей.

Работы, лежащие на критическом пути, называются **критическими**. От их продолжительности зависит общий срок завершения всех работ. Некритические работы допускают некоторое запаздывание в их выполнении, которое не задержит сроков реализации всего проекта.

Ранним сроком $t_p(j)$ **свершения события j** называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы. Счет времени ведется от момента наступления начального события. Ранний срок начального события равен 0. $t_p(0) = 0$. Ранний срок любого другого j -го события определяется продолжительностью самого длительного из предшествующих путей. Определяем ранние сроки свершения событий по рекуррентному соотношению:

$$t_p(j) = \max_{i, j \in u} \{t_p(i) + t_j\}, \quad (j = \overline{2, n}).$$

Полный срок наступления события – время, при котором планируемый срок окончания проекта не меняется. Обозначается $t_n(i)$ – для i -го события.

Замечание. Для завершающего события K поздний срок наступления совпадает с ранним, т. е. $t_p(K) = t_n(K)$.

При определении поздних сроков наступления события расчет ведут от завершающего события к исходному. Каждую вершину орграфа (событие сетевой модели) разобьем на 3 сектора: в нижнем проставляем номер события; в левом – ранний срок; в правом – поздний срок.

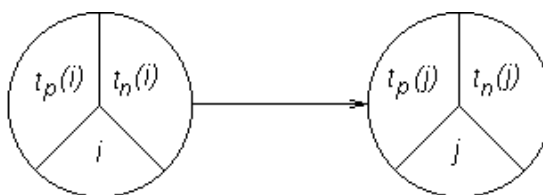


Рис. 1

Резервы времени каждого события находятся по формуле:
$$R_i = t_p(i) - t_n(i).$$

Замечание. Для событий i , лежащих на критическом пути, ранние и поздние сроки наступления совпадают, т. е. $t_p(i) = t_n(i)$.

Понятие ранних и поздних сроков наступления событий играют важную роль в процессе выполнения проекта. Если все события i наступают не позднее $t_n(i)$, то это значит, что проект осуществится не позднее установленного срока. Если какое-то событие i наступает позднее $t_n(i)$, то принимают меры для ускорения работ в этой части проекта. Если ускорить работу не удастся, то полный срок выполнения проекта будет превышен. Время, на которое задерживаются все работы, можно тоже вычислить по сетевому графику.

Метод расчета сетевых графиков выполняется в четыре этапа:

1. Определение ранних сроков наступления событий $t_p(i)$.
2. Нахождение критического пути $L_{кр}$.
3. Определение поздних сроков наступления события $t_n(i)$.
4. Определение резерва времени R_i события.

Замечание. Использование независимого резерва времени на i -й работе, которая его имеет, не влияет на ранние и поздние сроки совершения всех событий и работ сети. Его нельзя передать ни предшествующим, ни последующим работам.

Оптимизация СМ выражается в перераспределении ресурсов с ненапряженных работ на критические для ускорения их выполнения. Для этого необходимо как можно более точно оценить степень трудности своевременного выполнения всех работ, а также всех «цепочек» пути. Более точным инструментом решения этой задачи, по сравнению с полным резервом, является **коэффициент напряженности**. Его можно вычислить по следующим формулам:

$$K_H(i, j) = \frac{t(L_{\max}) - t_{\text{кр}}}{t_{\text{кр}} - t'_{\text{кр}}} \quad \text{или}$$
$$K_H(i, j) = 1 - \frac{R_n(i, j)}{t_{\text{кр}} - t'_{\text{кр}}},$$

где $t(L_{\max})$ – продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i, j) ;

$t'_{\text{кр}}$ – продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Коэффициент напряженности изменяется от 0 до 1. Чем ближе он к 1, тем сложнее выполнить данную работу в установленный срок. Самыми напряженными являются работы критического пути, для которых $K_H = 1$.

На основе этого коэффициента все работы сетевого графика подразделяются на три группы:

- 1) $K_H(i, j) > 0,8$ – напряженные;
- 2) $0,6 < K_H(i, j) < 0,8$ – подкритические;
- 3) $K_H(i, j) < 0,6$ – резервные.

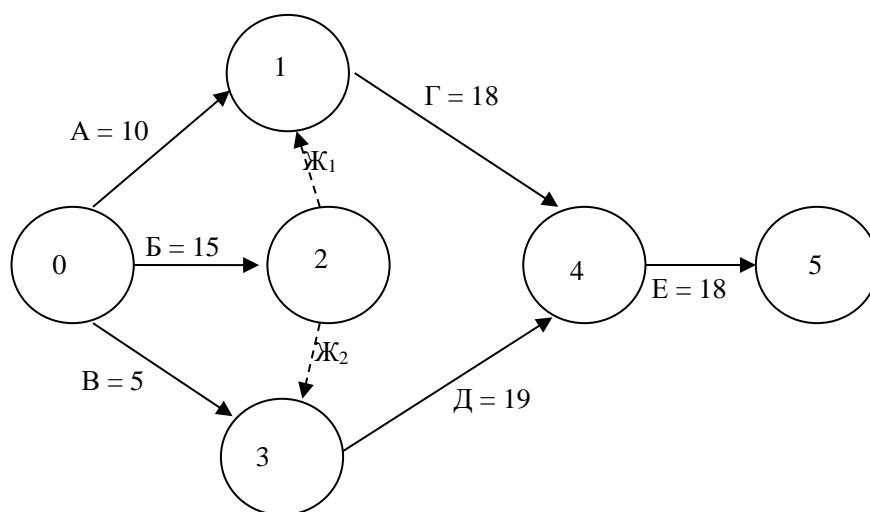
В результате перераспределения ресурсов стараются максимально уменьшить общую продолжительность работ. Для этого необходимо все работы перевести в первую группу.

Пример 1. Ставропольский кондитерский цех решил закупить новое оборудование. Исходные данные по основным операциям проекта представлены в таблице. Необходимо построить сетевую модель проекта, определить временные параметры модели, критический путь и проанализировать, как влияет на ход выполнения проекта задержка определенного типа оборудования на 12 часов.

Исходные данные задачи:

Название	Непосредственно предшествующие операции	Длительность, часы
Определение необходимого типа оборудования (А)	—	10
Заказ оборудования (Б)	—	15
Составление договора купли-продажи (В)	—	5
Доставка (Г)	А, Б	18
Сборка и установка (Д)	Б, В	19
Контрольная проверка (Е)	Г, Д	18

Решение. Построим сетевую модель по условию задачи.



Работы Ж₁ и Ж₂ введены для устранения параллельности работ Г и Д.

Расчет критического пути включает два этапа. Первый называется прямым проходом. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор,

пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события вычисляется одно число, представляющее ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом обратным проходом, вычисления начинают с завершающего события и продолжают, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

Найдем ранние сроки наступления событий:

$$t_p(1) = 0.$$

$$t_p(2) = \max \{t(1) + t(1, 2); t(1) + t(1, 3)\} = \max \{10 + 0; 0 + 15\} = 15.$$

$$t_p(3) = t(1) + t(1, 3) = 15.$$

$$t_p(4) = \max \{t_p(3); t(1) + t(1, 4)\} = \max \{5; 15\} = 15.$$

$$t_p(5) = \max \{t_p(2) + t(2, 5); t_p(4) + t(4, 5)\} = \max \{10 + 18; 15 + 19\} = 34.$$

$$t_p(6) = \max \{t_p(5) + t(5, 6)\} = 34 + 18 = 52.$$

Найдем поздние сроки наступления событий для завершающего события

$$t_n(6) = t_p(6).$$

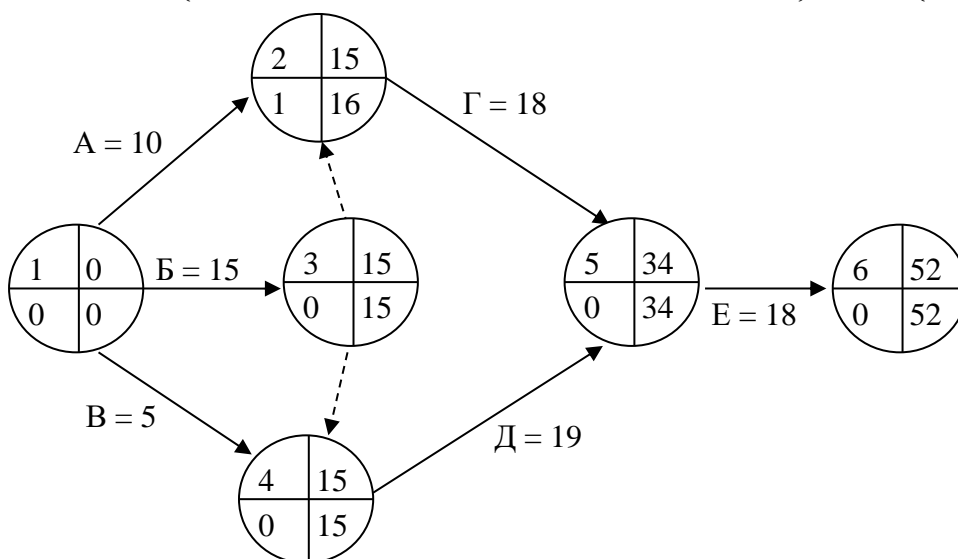
$$t_n(5) = t_n(6) - t(5, 6) = 52 - 18 = 34.$$

$$t_n(4) = t_n(5) - t(4, 5) = 34 - 19 = 15.$$

$$t_n(3) = \min \{t_n(4); t_n(2)\} = \min \{15, 16\} = 15.$$

$$t_n(2) = t_n(5) - t(2, 5) = 34 - 18 = 16.$$

$$t_n(1) = \min \{t_n(2) - t(1, 2); t_n(3) - t(1, 3); t_n(4) - t(1, 4)\} = \min \{6; 0; 10\} = 0$$



При поиске критических путей на сетевом графике будем использовать следующие условия его критичности:

- необходимое условие – нулевые резервы событий, лежащих на критическом пути;
- достаточное условие – нулевые полные резервы работ, лежащих на критическом пути.

Согласно необходимому условию два полных пути сетевой модели могут быть критическими: $L_1=1, 3, 4, 5, 6$ и $L_2=1, 4, 5, 6$. Проверим достаточное условие критичности для работ (1, 3) и (1, 4)

$$R_n(1, 3) = T_n(3) - T_p(1) - t(1, 3) = 15 - 0 - 15 = 0.$$

$$R_n(1, 4) = T_n(4) - T_p(1) - t(1, 4) = 15 - 0 - 5 = 10.$$

Путь L_2 , начинающийся с работы (1, 4) не является критическим, так как как минимум одна (1, 4) из его работ не является критической. Работа (1, 4) имеет не нулевой полный резерв, а значит, может быть задержана с выполнением, что недопустимо для критических работ.

Таким образом, сетевая модель имеет единственный критический путь $L_{кр.}=1, 3, 4, 5, 6$, длительностью $T_{кр.}=52$ часа. За выполнением работ этого пути необходим особый контроль, так как любое увеличение их длительности нарушит срок выполнения проекта в целом.

Работа A или (1, 2) не является критической, ее полный резерв равен 1 часу. Это означает, что при задержке работы в пределах 1 часа срок выполнения проекта не будет нарушен. Поэтому, если согласно условию работа A задержится на 12 часов, то весь проект задержится на 11 часов.

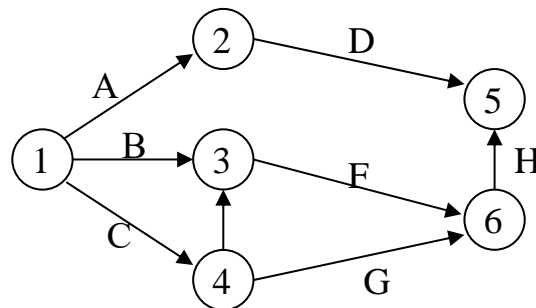
Пример 2. Компания «АВС» реализует проекты серийного производства различных видов продукции. Каждый проект обеспечивает получение в неделю 100 тыс. у. д. е. дополнительной прибыли. Перечень работ и их характеристики представлены в таблице.

Перечень работ и их характеристики

Работы	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы, недель		Стоимость работы, тыс. у. д. е. при $t(i, j) = t_{нв}(i, j)$	Коэффициент затрат на ускорение работы
		t_{\min}	t_{\max}		
A	—	4	6	110	22
B	—	7	9	130	28
C	—	8	11	160	18
D	A	9	12	190	35
E	C	5	8	150	28
F	B, E	4	6	130	25
G	C	11	15	260	55
H	F, G	4	6	90	15

1. Изобразить проект с помощью сетевой модели.
2. Определить наиболее вероятную продолжительность каждой работы.
3. Найти все полные пути сетевого графика, определить критический путь, ожидаемую продолжительность выполнения проекта и полную стоимость всех работ.

Решение. Построим сетевую модель проекта:



2. Наиболее вероятная продолжительность работ $t_{нв} = (2t_{\min} + 3t_{\max})/5$.

$$t_{нв A} = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 6)/5 = 5,2$$

$$t_{нв B} = (2 \cdot 7 + 3 \cdot 9)/5 = 8,2$$

$$t_{нв C} = (2 \cdot 8 + 3 \cdot 11)/5 = 9,8$$

$$t_{нв D} = (2 \cdot 9 + 3 \cdot 12)/5 = 10,8$$

$$t_{нв E} = (2 \cdot 5 + 3 \cdot 8)/5 = 6,8$$

$$t_{нв F} = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 6)/5 = 5,2$$

$$t_{нв G} = (2 \cdot 11 + 3 \cdot 15)/5 = 13,4$$

$$t_{нв H} = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 6)/5 = 5,2$$

Возможные полные пути

I. 1 – 2 – 5. Длина: $t_{нв A} + t_{нв D} = 5,2 + 10,8 = 16$.

II. 1 – 3 – 6 – 5. Длина: $t_{нв B} + t_{нв F} + t_{нв H} = 8,2 + 5,2 + 5,2 = 18,6$.

III. 1 – 4 – 6 – 5. Длина: $t_{НВ С} + t_{НВ G} + t_{НВ Н} = 9,8 + 13,4 + 5,2 = 28,4$.

IV. 1 – 4 – 3 – 6 – 5. Длина: $t_{НВ С} + t_{НВ E} + t_{НВ F} + t_{НВ Н} = 9,8 + 6,8 + 5,2 + 5,2 = 27$.

Максимальная длина пути, равная 28,4 недели, соответствует пути III, на котором лежат работы *C*, *G*, *H*. Следовательно, он является критическим.

Задания для решения

1. Реконструкция торгового центра. Департамент юго-западного округа Москвы рассматривает возможность реконструкции торгового центра у станции метро «Юго-Западная». После сноса старых палаток проектом предусматривается строительство павильонов для сдачи их в аренду торговым фирмам. Работы, которые необходимо выполнить при реализации проекта, а также их взаимосвязь и время выполнения указаны в следующей таблице:

Работа	Содержание работы	Непосредственно предшествующие	Время выполнения,
<i>A</i>	Подготовить архитектурный проект	—	5
<i>B</i>	Определить будущих арендаторов	—	6
<i>C</i>	Подготовить проспект для арендаторов	<i>A</i>	4
<i>D</i>	Выбрать подрядчика	<i>A</i>	3
<i>E</i>	Подготовить документы для получения разрешения на строительство	<i>A</i>	1
<i>F</i>	Получить разрешение на строительство	<i>E</i>	4
<i>G</i>	Осуществить строительство	<i>D, F</i>	14
<i>H</i>	Заключить контракты с арендаторами	<i>B, C</i>	12
<i>I</i>	Вселить арендаторов в павильоны	<i>G, H</i>	2

Вопросы:

1. Сколько работ на критическом пути?
2. Какова длина критического пути?
3. На сколько недель можно отложить начало выполнения работы *E*, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта?
4. На сколько недель можно отложить начало выполнения работы *B*, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта (полный резерв времени)?
5. На сколько недель можно отложить начало выполнения работы *C*, чтобы

это не изменило наиболее поздний срок наступления последующего события (свободный резерв времени)?

2. Консалтинговая компания «Системы управленческих отношений» специализируется на разработке систем поддержки проектов. Компания заключила контракт на разработку компьютерной системы, предназначенной для помощи руководству фирмы в планировании капиталовложений.

Руководитель проекта разработал следующий перечень взаимосвязанных работ:

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения, недели
<i>A</i>	—	4
<i>B</i>	—	6
<i>C</i>	—	5
<i>D</i>	<i>B</i>	2
<i>E</i>	<i>A</i>	9
<i>F</i>	<i>B</i>	4
<i>G</i>	<i>C, D</i>	8
<i>H</i>	<i>B, E</i>	3
<i>I</i>	<i>F, G</i>	5
<i>J</i>	<i>I</i>	7

Постройте графическое представление проекта.

Вопросы:

1. Какова длина критического пути?
2. Сколько работ находится на критическом пути?
3. Каков резерв выполнения работы *F*?